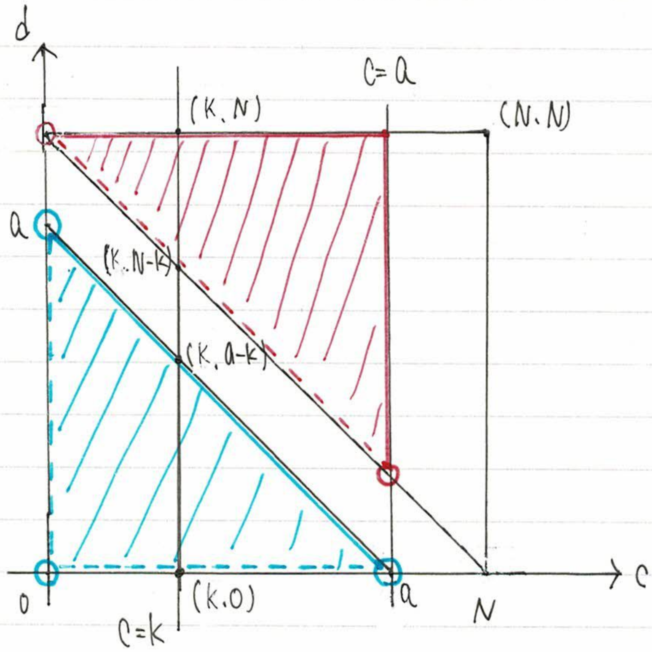
2005年　東大数学　文系第4問　理系第5問 ②

(1) フローチャートより

「$c \leqq a$」かつ「$c+d \leqq a$ または $N < c+d$」

となる (c, d) の数を、a で表せばよい。



求める (c, d) の数は、上の図の2つの領域内の格子点の数である。

赤の領域において、　$N-k < d \leqq N$ の個数。

$c=k$ 上の格子点は、$N-(N-k) = k$ 個

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{a} k = \frac{1}{2}a(a+1)$ 個

青の領域において　$0 < d \leqq a-k$ の個数。

$c=k$ 上の格子点は、$a-k-0 = a-k$ 個

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{a-1}(a-k) = (a-1)+(a-2)+\cdots+3+2+1$

$= 1+2+3+\cdots+(a-2)+(a-1)$

$= \frac{1}{2}(a-1)(1+a-1) = \frac{1}{2}a(a-1)$ 個

よって、格子点の数は、$\frac{1}{2}a(a+1) + \frac{1}{2}a(a-1) = a^2$ 個

(c, d) の選び方は全部で

$N \times N = N^2$ 通りある。よって、$\dfrac{a^2}{N^2}$ //

(2) フローチャートより

「$a+b \leqq N$」かつ「$c \leqq a+b$」かつ「$c+d \leqq a+b$ または $N < c+d$」

となる (b, c, d) の数を a で表せばよい。

下線部の条件は、(1) の a を $a+b$ に置き換えたものである。(1) では a^2 個だった。

よって、(c, d) の格子点の個数は $(a+b)^2$ 個

b の選び方は、$1 \leqq b \leqq N$ かつ $b \leqq N-a$ より

$1 \leqq b \leqq N-a$

ある b に対して $(a+b)^2$ 個の (c, d) があり、

b は $1, 2, 3, \cdots, N-a$ を動くので、

全ての (b, c, d) の個数は、

$\displaystyle\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = (a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+N^2$

$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2) - (1^2+2^2+\cdots+a^2)$

$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)$

(b, c, d) の選び方は、$N \times N \times N = N^3$ 通りある。

よって、$\dfrac{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)}{N^3}$

$= \dfrac{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)}{6N^3}$ //